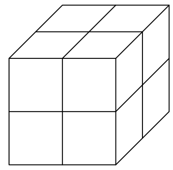
УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 5 КЛАССА

1. Даны восемь кубиков со стороной 1. На гранях каждого из них записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в каком-то порядке, при этом на разных кубиках числа могут быть записаны по-разному. Все восемь кубиков составлены так, что образуют куб со стороной 2, причём числа на соприкасающихся гранях разных кубиков одинаковы.



Найдите наибольшую возможную сумму чисел, записанных на поверхности этого куба со стороной 2.

Ответ: 120.

Решение. Заметим, что у каждого кубика со стороной 1 ровно три грани на поверхности куба со стороной 2, поэтому сумма на этих трёх гранях не превосходит суммы трёх максимальных чисел на этом кубе, то есть $6 + 5 + 4 = 15$. Значит, поскольку кубиков 8, сумма чисел на поверхности куба не превосходит $15 \cdot 8 = 120$.

Построим пример, показывающий, что сумма всех чисел на поверхности куба может быть равна 120. Для этого у каждого кубика расположим (неважно, как именно) числа $4, 5, 6$ на гранях, выходящих на поверхность куба со стороной 2. Куб $2 \times 2 \times 2$ разобьём на два слоя: верхний и нижний – из четырёх кубиков каждый. На верхних гранях нижнего слоя и на нижних гранях верхнего слоя запишем число 3. На гранях, общих у кубиков нижнего слоя, при виде сверху образующих «крест», запишем числа 1, 2, 1, 2 в указанном порядке. Аналогично поступим и с кубиками верхнего слоя. Таким образом, несложно убедиться, что на всех кубиках будут записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в каком-то порядке, при этом числа на соприкасающихся гранях будут одинаковы, а сумма всех чисел на поверхности куба со стороной 2 будет равна 120.

2. У Вадима есть два одинаковых набора карточек: один в левом, а другой в правом кармане. Оба набора состоят из семи карточек, на каждой карточке написано какое-то натуральное число, все семь чисел различны. Вадим семь раз проделал следующую операцию: доставал наугад по одной карточке из каждого кармана, и откладывал их в сторонку, предварительно вычислив сумму записанных на них чисел. В конце он заметил, что все семь найденных им сумм равны.

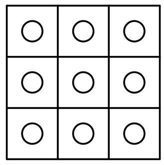
Могло ли оказаться, что эти суммы равны **а)** 100; **б)** 101?

Ответ: а) да; **б)** нет

Решение. а) Рассмотрим набор, в котором на карточках написаны числа $47, 48, 49, 50, 51, 52$ и 53. Для этого набора ситуация, описанная в условии задачи возможна, если Вадим вытягивал пары чисел $(47, 53)$, $(48, 52)$, $(49, 51)$, $(50, 50)$, $(51, 49)$, $(52, 48)$ и $(53, 47)$.

б) Чтобы в сумме получилось нечётное число нужно сложить чётное и нечётное числа, то есть числа на наборе должны разбиваться на пары чётное - нечётное, чего быть не могло, так как количество карточек нечётно.

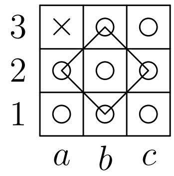
3. В центре каждой клетки квадрата 3×3 лежит по монетке. Какое наименьшее число монет можно убрать так, чтобы никакие четыре из оставшихся монеток не лежали в вершинах квадрата (любого размера и расположения)?



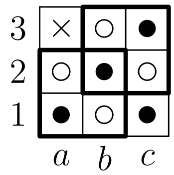
Ответ: 3.

Предположим, что нам удалось убрать не более двух монеток. Заметим, что монетки, лежащие в угловых клетках исходного квадрата, расположены в вершинах квадрата 2×2. Следовательно хотя бы одна из них убрана. Не теряя общности, пусть убрана левая верхняя.

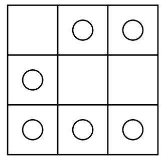
Пронумеруем столбцы буквами a, b, c, а строки – цифрами $1, 2, 3$, как на шахматной доске. Монетки, лежащие в клетках $b1$, $a2$, $c2$ и $b3$, расположены в вершинах квадрата, значит, одна из них тоже убрана. Таким образом, мы убрали ровно две монетки, причём монетки, расположенные в клетках $a1$, $c1$, $b2$ и $c3$, остались неубранными.



Однако, это невозможно, так как необходимо убрать одну монетку из клеток $b3$ и $c2$ (центры клеток $b2$, $c2$, $b3$, $c3$ лежат в вершинах квадрата) и одну монетку из клеток $b1$ и $a2$ (центры клеток $a1$, $b1$, $a2$, $b2$ лежат в вершинах квадрата), а всего из клеток $b1$, $a2$, $c2$ и $b3$ убрана ровно одна монетка – противоречие.



Следовательно, необходимо убрать по крайней мере три монетки, т.е. получится оставить не более шести монеток. Нетрудно убедиться, что, если оставить шесть монеток из девяти, как показано на рисунке, то никакие четыре из оставшихся монеток не будут лежать в вершинах квадрата любого размера и расположения.



4. У Миши есть красная, синяя и зелёная кнопки и два счётчика, которые изначально показывают значения 0 и 0. Если два раза подряд нажать одну и ту же кнопку, значение первого счётчика увеличится на 1. А если нажать синюю кнопку сразу после красной или красную кнопку сразу после синей, значение второго счётчика увеличится на 1. После того, как Миша в некотором порядке нажал на кнопки девять раз, первый счётчик показал число 2, а второй – число 5.

Сколько раз Миша мог нажать зелёную кнопку?

Ответ: 1, 2 или 3.

Поскольку значение второго счётчика равно 5, то пять раз была нажата синяя кнопка сразу после красной или красная кнопка сразу после синей. На это потребовалось хотя бы 6 нажатий на синие и красные кнопки (первое нажатие и 5 смен). Значит, Миша нажал на зелёную кнопку не более $9 - 6 = 3$ раз.

С другой стороны, если зелёная кнопка не была нажата ни разу, то каждый раз после нажатия очередной кнопки значение ровно одного из счётчиков увеличивалось бы на 1, поэтому сумма значений счётчиков после нажатия всех девяти кнопок была бы равна 8, что больше суммы 5+2, данной в условии задачи. Значит, Миша нажал на зелёную кнопку хотя бы один раз.

Приведём примеры, в которых зелёная кнопка была нажата один, два и три раза соответственно (З обозначает зелёную кнопку, К – красную, а С – синюю):

- З, К, К, К, С, К, С, К, С;
- З, З, К, К, С, К, С, К, С;
- З, З, З, К, С, К, С, К, С.

5. Незнайка выбрал три различные ненулевые цифры a, b, c и составил все возможные трёхзначные числа, в десятичной записи каждого из которых встречаются все выбранные им цифры.

Могли ли все составленные Незнайкой трёхзначные числа оказаться простыми? (Натуральное число называется простым, если оно имеет ровно два различных натуральных делителя)

Ответ: Нет.

Решение. Незнайка не мог выбрать ни одну из цифр 2, 4, 5, 6 и 8, иначе среди составленных им трёхзначных чисел хотя бы одно делилось на 2 или на 5. Остаётся четыре варианта: 1, 3, 7, 9. Следовательно, цифры a, b, c – это либо 1, 3, 7, либо 1, 3, 9, либо 1, 7, 9, либо 3, 7, 9, взятые в некотором порядке. Разложения на множители

$$371 = 7 \cdot 53, \quad 319 = 11 \cdot 29, \quad 791 = 7 \cdot 113, \quad 793 = 13 \cdot 61.$$

показывают, что ни один из этих случаев не возможен.