УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 6 КЛАССА

1. Подружки Даша и Лиза на протяжении двух месяцев следили за выходом нового сезона своего любимого сериала на его официальном сайте. Серии выходили нерегулярно и каждый раз, когда одна из подруг заглядывала на сайт, она записывала в свой блокнот, сколько серий вышло к этому моменту. В первом месяце Лиза проверила сайт дважды, а Даша – трижды. А во втором месяце Лиза проверила сайт трижды, а Даша – дважды. По прошествии двух месяцев сумма пяти чисел, записанных Лизой, была равна 17, а сумма пяти чисел, записанных Дашей, – 28.

Могло ли оказаться так, что все десять чисел, которые девочки записали себе блокноты, попарно различны?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Предположим, все десять записанных подружками чисел попарно различны. Каждое из трёх чисел, которые Лиза записала в свой блокнот во втором месяце, не меньше, чем каждое из пяти чисел, которые подружки записали себе в блокноты в первом месяце. Пять наименьших неотрицательных целых чисел равны $0, 1, 2, 3, 4$. Значит, сумма трёх чисел, которые Лиза записала во втором месяце, не меньше $5 + 6 + 7 = 18$, что уже́ больше, сумма 17, данная в условии задачи (притом, что мы не учли, что сумма двух чисел, записанных Лизой в первом месяце не меньше $0 + 1$).

Таким образом, среди десяти записанных в блокноты чисел обязательно найдутся два равных.

2. На столе лежат несколько не обязательно одинаковых стопок книг. Для каждой книги нашли модуль разности между количеством книг, которые лежат снизу, и количеством книг, которые лежат сверху неё.

Может ли сумма всех найденных чисел равняться 2025?

Ответ: Нет.

Решение. Рассмотрим любую из стопок. Для любых двух книг, которые находятся на одинаковой позиции снизу и сверху стопки, модули разностей, вычисленные для них, совпадают. Более того, если стопка состоит из нечётного числа книг, то для центральной книги модуль разности равен 0. Следовательно, сумма найденных чисел для каждой стопки чётная. Сумма чётных чисел не может равняться нечётному числу 2025.

3. Трёхзначное простое число такое, что число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, тоже является простым, будем называть *перевёртышем.* Например, число 107 – перевёртыш, так как чи́сла 107 и 701 простые; а простое число 211 перевёртышем не является, поскольку число 112 составное.

Докажите, что количество всех перевёртышей меньше 100.

Решение. Перевёртыш не может начинаться на $2, 4, 5, 6, 8$ или заканчиваться на $0, 2, 4, 5, 6, 8$, иначе оно само или число, записанное в обратном порядке, делилось бы на 2 или на 5. Значит, первая и последняя цифра перевёртыш – одна из четырёх чисел $1, 3, 7, 9$, таких чисел $4 \cdot 10 \cdot 4 = 160$ штук.

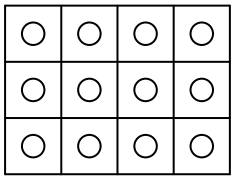
Составим таблицу, где слева будет первая цифра числа, сверху последняя, а в самой таблице будет остаток при делении на 3 суммы этих чисел.

+	1	3	7	9
1	2	1	2	1
3	1	0	1	0
7	2	1	2	1
9	1	0	1	0

Согласно признаку делимости на три, если сумма цифр числа делится на три, то и само число делится на три. Значит, цифра десятков перевётрыша не может дополнять сумму цифр сотен и единиц до числа, делящегося на три. Нетрудно заметить, что для остатков 1 и 2 есть по три запрещённые цифры десятков, а для остатка 0 есть четыре запрещённые цифры десятков. Из таблицы находим, что $12 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 52$ из наших 160 кандидатов в перевётрыши делятся на три, т.е. не подходят. Остаётся 108 возможных перевёртышей.

Среди оставшихся кандидатов числа 121, 341, 143, 781 и 187 делятся на 11 (их нетрудно найти, пользуясь признаком делимости на 11). Остаётся всего 103 кандидата, но $119 = 7 \cdot 19$, а $361 = 19 \cdot 19$, значит, числа 119, 911, 361 и 163 не подходят. Таким образом, осталось всего 99 кандидатов в перевёртыши, что уже́ меньше 100.

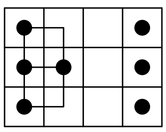
4. В центре каждой клетки прямоугольника 3×4 лежит по монетке. Какое наименьшее число монет можно убрать так, чтобы никакие четыре из оставшихся монеток не лежали в вершинах квадрата (любого размера и расположения)?



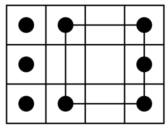
Ответ: 4.

Из решения задачи номер 3 пятого класса следует, что в квадрате 3×3 необходимо убрать по крайней мере три монетки, следовательно, и в прямоугольнике 3×4 их придётся убрать не меньше трёх. Предположим, что возможно убрать три монетки с соблюдением условия задачи. В левом квадрате 3×3 убраны три монетки, значит, все три монетки правого столбца прямоугольника остались на месте. Аналогично, рассматривая правый квадрат 3×3, заключаем, что и в левом столбце прямоугольника не убрано ни одной монетки.

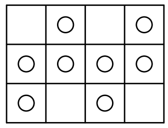
По принципу Дирихле (для трёх монеток и двух столбцов), в одном из двух средних столбцов убрали не больше одной монетки, не ограничивая общности, пусть во втором слева. Если убранная монетка лежала не среднем ряду, то какие-то четыре монетки, оставшиеся в первом и втором столбцах, лежат в вершинах одного из двух отмеченных квадратов.



Значит, убранная монетка монетка лежала в среднем ряду, но тогда четыре монетки, расположенные во втором и третьем столбце, лежат в вершинах квадрата. Во всех случаях получили противоречие, следовательно, необходимо убрать хотя бы четыре монеты.



С другой стороны, как нетрудно убедиться непосредственным перебором, можно убрать четыре монетки, так, что среди оставшихся восьми монеток (изображённых на рисунке) никакие четыре не будут лежать в вершинах квадрата любого размера и расположения.



5. Все натуральные числа от 1 до 100 выписали в ряд в некотором порядке, каждое число использовали ровно один раз. Назовём пару соседних чисел *хорошей*, если левое число делится на правое.

Найдите наибольшее возможное количество хороших пар.

Ответ: 50.

Рассмотрим правые числа всех хороших пар. Во-первых, они различны, так как принадлежат разным парам, а во-вторых, каждое из них не превосходит 50 как делитель числа, не превосходящего 100. Значит, правых чисел хороших пар не больше 50, но тогда и самих хороших пар не больше 50.

Приведём пример расположения чисел в ряду, при котором найдётся 50 хороших пар. Составим 49 последовательностей, каждая из которых начинается с нечётного числа от 1 до 49 и числа в ней последовательно удваиваются:

$$(1, 2, 4, \ldots, 64), \quad (3, 6, 12, \ldots, 96), \quad (5, 10, 20, 40, 80), \ \ldots \ (49, 98),$$

после чего запишем все эти числа в обратном порядке. В результате, слева от каждого числа от 1 до 50 будет записано вдвое большее его число и мы получим 50 хороших пар. После этого добавим в конце или начале полученного ряда все недостающие числа в произвольном порядке и требуемый пример построен.