УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 7 КЛАССА

1. Женя выписала пять последовательных натуральных чисел. Среди них нашлось три нечётных числа с суммой 63.

Чему может быть равна сумма двух оставшихся чисел?

Ответ: 42.

Решение. Обозначим числа, выписанные Женей, через x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$. Так как среди них нашлось три нечётных числа, то первое выписанное число x должно быть нечётным. Более того, известно, что

$$x + (x+2) + (x+4) = 63,$$

т.е. $3x = 57$, а значит, $x = 19$. Поэтому сумма двух оставшихся выписанных чисел равна $(x+1) + (x+3) = 42$.

2. В некоторой компании друзей, состоящей из 21 человека, каждый является либо правдивым (всегда говорит правду), либо лжецом (всегда обманывает), причём все знают друг о друге, кем кто является. Однажды друзья расположились по кругу и каждый ответил на вопрос: „Сколько правдивых среди твоих соседей слева и справа?". Оказалось, что все ответили «один».

Сколько правдивых могло быть в этой компании?

Ответ: 0 или 14.

Предположим, что в компании есть правдивый. Согласно условию, у каждого правдивого ровно один правдивый сосед. Значит, по кругу расположились группы по два правдивых подряд и между соседними группами стоит по несколько лжецов. С другой стороны, два и более подряд лжеца стоять не могут, иначе нашёлся бы лжец, у которого ровно один правдивый сосед. Таким образом, по кругу стоят семь троек вида „правдивый, правдивый, лжец".

Кроме того, как нетрудно видеть, условию задачи удовлетворяет и компания, состоящая только из лжецов. Следовательно, правдивых либо 14, либо 0.

3. Клетки таблицы 8×8 заполнили числами так, что у всех 30 диагоналей, параллельных какой-нибудь из главных диагоналей, произведения записанных в них чисел равны одному и тому же числу x.

Найдите наибольшее возможное значение числа x.

Ответ: 1.

Решение. Если вся таблица заполнена нулями, то $x = 0$. Найдём все возможные ненулевые значения числа x. Из условия задачи следует, что в каждой угловой клетке таблицы записано число x. Следовательно, произведение чисел, записанных во всех неугловых клетках главной диагонали (любой из двух), равно $\frac{1}{x}$.

x		•		•		•	x
	•		•		•		•
•		•		•		•	
	•		•		•		•
•		•		•		•	
	•		•		•		•
•		•		•		•	
x	•		•		•		x

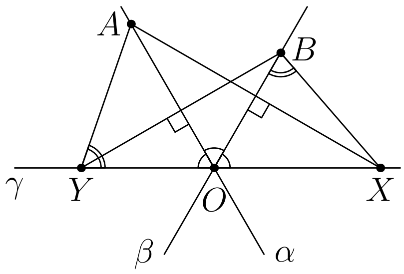
Найдём произведение P всех чисел, записанных в клетках, отмеченных на рисунке. Группируя отмеченные клетки по диагоналям, параллельным главной диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний угол таблицы, получаем, что $P = x^6$. С другой стороны, группируя отмеченные клетки по диагоналям, параллельным главной диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол таблицы, получаем, что $P = x^6 \cdot \frac{1}{x}$. Поэтому $\frac{1}{x} = 1$, т.е. $x = 1$. Очевидно, что значение $x = 1$ достигается, например, когда вся таблица заполнена единицами.

4. Прямые α, β, γ пересекаются в точке O и делят плоскость на 6 равных частей. На прямых α и β отметили соответственно точки A и B, отличные от O. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой β, пересекает прямую γ в точке X. Перпендикуляр из точки B к прямой α пересекает прямую γ в точке Y.

Найдите угол между прямыми AY и BX.

Ответ: 60°.

Решения. Рассмотрим расположение точек A и B, показанное на рисунке (другие расположения точек рассматриваются аналогично). Так как прямые α, β, γ делят плоскость на 6 равных частей, то углы между этими прямыми равны по $360^\circ/6 = 60^\circ$. В треугольнике AOX прямая β содержит высоту и биссектрису, проведённые из вершины O. Следовательно, треугольник AOX равнобедренный. Аналогично доказывается, что треугольник BOY равнобедренный. Так как



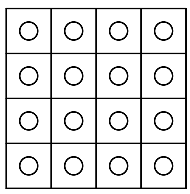
$$AO = OX, \quad OY = OB \quad \text{и} \quad \angle AOY = \angle BOX = 60^\circ,$$

то треугольники AOY и XOB равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $\angle AYO = \angle OBX$, а значит,

$$\angle AYX + \angle BXY = \angle OBX + \angle BXO = 180^\circ - \angle BOX = 120^\circ.$$

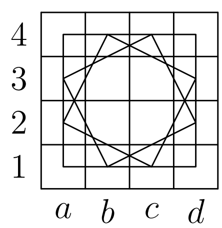
Поэтому угол между прямыми AY и BX равен $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

5. В центре каждой клетки квадрата 4×4 лежит по монетке. Какое наименьшее число монет можно убрать так, чтобы никакие четыре из оставшихся монеток не лежали в вершинах квадрата (любого размера и расположения)?

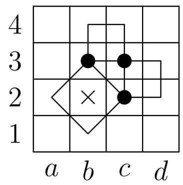


Ответ: 6.

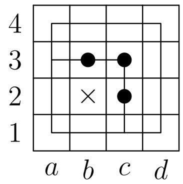
Предположим, что нам удалось убрать не более пяти монеток с соблюдением условия задачи. Пронумеруем столбцы буквами a, b, c, d, а строки – цифрами $1, 2, 3, 4$, как на шахматной доске. Монетки, которые лежат в клетках каждой из четвёрок $a1a4d1d4$, $a2b4d3c1$ и $a3c4d2b1$, расположены в вершинах трёх квадратов, следовательно, в каждой из этих четвёрок убрано по крайней мере по одной монетке. Монетки, лежащие в клетках четвёрки $b2b3c3c2$, также расположены в вершинах квадрата, значит, из них убрана либо одна, либо две. Рассмотрим эти два варианта по отдельности.



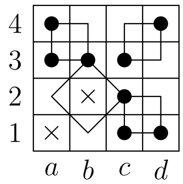
1) Допустим из клеток четвёрки $b2b3c3c2$ убрана только одна монетка, не теряя



общности, пусть она лежала в клетке $b2$. Тогда в клетках $b3, c2, c3$ монетки остались. Значит, в каждой из пар клеток $d2d3$, $b4c4$ и $a2b1$ была убрана хотя бы одна монетка (соответствующие квадраты изображены на рисунке). Мы уже нашли, где расположены четыре убранные монетки.

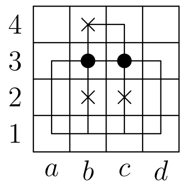


Среди ещё не рассмотренных клеток есть клетки $a1, a3, c1$ одного квадрата и $a1, a4, d1, d4$ другого (соответствующие квадраты изображены на рисунке). В каждой из этих групп был убрана хотя бы одна монетка, значит, всего убрали пять, а не четыре монетки, причём монетку из клетки $a1$ убрали, а в клетках $a3, a4, c1, d1, d4$ монетки остались.

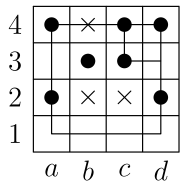


Тогда монетки были убраны в клетках $b4$ и $d2$, а также, в каждой из пар $c4d3$ и $a2b1$ (соответствующие квадраты изображены на рисунке). Мы уже нашли шесть убранных монеток, что противоречит сделанному предположению. Случай, когда в центральном квадрате 2×2 убрали только одну монетку полностью разобран.

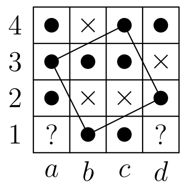
2) Рассмотрим случай, когда в клетках четвёрки $b2b3c3c2$ убраны две монетки, не теряя общности, достаточно рассматривать пары пустых клеток $b2c2$ и $b2c3$.



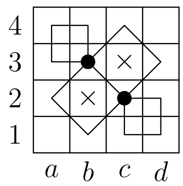
2а) Если монетки убраны из клеток $b2$ и $c2$, то в клетках $b3$, $c3$ монетки остались. Хотя бы из в одной из клеток пары $b4c4$ убрали монетку. Не теряя общности, пусть из $b4$. В четвёрках клеток $a1a3c1c3$ и $b1b3d1d3$ убраны ещё по одной монетке (соответствующие квадраты изображены на рисунке) – уже́ пять убранных монеток.



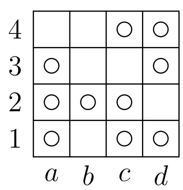
Значит, в клетках $a2$, $a4$, $c4$, $d2$ и $d4$ монетки остались. Следовательно, в четвёрке клеток $c3c4d3d4$ монетку убрали из клетки $d3$, а в четверке $a1a4d4d1$ – из клетки $d1$ или $d4$ (соответствующие квадраты изображены на рисунке) – снова нашли расположение всех пяти убранных монеток.



Следовательно, в клетках $a3$, $b1$ и $c1$ монетки остались. Получаем противоречие с условием задачи, так как монетки, которые остались в клетках четвёрки $b1a3c4d2$ лежат в центрах квадрата, изображённого на рисунке. Случай 2а, в котором в центральном квадрате 2×2 убраны из клеток $b2$ и $c2$, разобран полностью.



2б) Осталось рассмотреть последний случай – когда монетки убраны из клеток $b2$ и $c3$, а в клетках $b3$ и $c2$ монетки остались. В каждой из пар $b1a2$, $d3c4$ и в каждой из троек $a3a4b4$ и $c1d1d2$ убрано хотя бы по одной монетке (соответствующие квадраты изображены на рисунке), следовательно, убрано хотя бы шесть монеток, что противоречит сделанному предположению.



Таким образом, необходимо убрать по крайней мере 6 монеток, т.е. получится оставить не более 10 монеток. С другой стороны, если оставить 10 монеток, как показано на рисунке справа, то никакие четыре из них не будут лежать в вершинах квадрата любого размера и расположения.